数理解析研究所講究録
669巻 1988年 78-108

Fundamental sequence の system の性質について

角田法也（広島大・工）
(Noriya KADOTA, Hiroshima Univ., Applied Math.)

§0 Introduction.

Fundamental sequence の"自然な"とり方とはどのようなものかを、[1], [3], [4] に引き続き考察する.

今、Δ をある countable ordinal として、任意の limit ordinal $\lambda < \Delta$ に対し、

(i) $\lambda[0] < \lambda[1] < \lambda[2] < \cdots < \lambda$,

(ii) $\lim_{x<\omega} \lambda[x] = \lambda$

を満たす sequence $\langle \lambda[x] \rangle_{x<\omega}$ (λ に対する fundamental sequence と呼ぶ) が対応しているとき、fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha : \omega \longrightarrow \omega \rangle_{\alpha<\Delta}$ を次のように帰納的に定義する。

(i) $F_0(x) = x+1$,

(ii) $F_{\alpha+1}(x) = \underbrace{F_\alpha(\cdots(F_\alpha}_{x+1\text{個の}F_\alpha}(x))\cdots)\ \left[= F_\alpha^{x+1}(x)\right]$

(iii) $F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$, 但し、$\lambda$ は limit ordinal.

また、

$\mathcal{F}_\alpha$ = elementary recursive in F_α である（ω上の）関数全体としよう．

Ketonen と Solovay が論文[5]の中で有限組合せ論的命題である Paris-Harrington Principle（PH）から定義される関数の階層と、ε_0 までの fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha<\varepsilon_0}$ の細かい関係を調べたとき，次の(I)，(II)の事実を用いて PH が Peano arithmetic（PA）では（正しいが）証明出来ないと結論したのであった．

(I)（Wainer [10]）ε_0 までの limit ordinals に対する standard な fundamental sequence の system

$$\langle \langle \lambda[x] \rangle_{x<\omega} : \lambda\ (<\varepsilon_0) \text{ は limit ordinal} \rangle$$

に対し，$\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathcal{F}_\alpha$ は，$\prec_\alpha$-recursive function $(\alpha<\varepsilon_0)$ 全体と一致する．

(II)（Kreisel）$\prec_\alpha$-recursive function $(\alpha<\varepsilon_0)$ 全体は provably recursive in PA である function 全体と一致する．

ここで，(I)の事実は，かってな fundamental sequence の system ではなく，具体的に"standard な" fundamental sequence の system をとれば，$\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathcal{F}_\alpha$ は $\prec_\alpha$-recursive func. $(\alpha<\varepsilon_0)$ 全体に一致するということを述べている．

Ketonen と Solovay の結果を拡張，一般化しようとする際，

また、それ自身の興味からも、(I)の事実を一般的に考察することは大切であるが、そのとき、(つまり、ε_0を一般のΔとするとき、)fundamental sequenceをどのようにとればよいかという問題が現われてくる、すなわち、fundamental sequenceの"自然な"systemとはどのようなものか、という問題の考察が重要なのである.

我々は[4](角田－青山)で、Schmidt[8]の結果を拡張して、その上で定義されたfast-growing hierarchy $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha<\Delta}$が、基本的な性質(例えば各$F_\alpha$がstrictly increasingであることなど)を持つようなfundamental sequenceのsystemの条件をいくつか定義して、それらの条件相互の関係や、second number class全体に対するsystemの存在に関する結果を得た.

ここでは、そのようなfundamental sequenceのsystemの性質の研究が、subrecursive hierarchyの理論,特に上記の(I)の一般化に、どのようにつながってくるかを考察する.

まずSection 1では、fundamental sequenceのsystemの性質の相互関係を[4]に従って述べる.そしてSection 2でfundamental sequenceのsystem上でのfast-growing hierarchyと<α-recursive functionsとの関係を一般的に考察する.最後に、Section 3では、Enumeration hierarchyとfast-growing hierarchyとの関係に関するZemke[11]の結果を述べる.

§ II Fundamental sequence の system.

ここでいう（Δ に対する）fundamental sequence の system とは、Zemke [11], Rose [7] 等で考察される system of notation（但し、uniqueness condition 付き）のことである.

Def.（Δ に対する）fundamental sequence の system $\mathcal{S} = (S, \prec)$ は次のように定義される.

(1) S は自然数全体 ω のある primitive recursive subset,

(2) $\prec$ は S 上の order-type Δ（ある countable ordinal）の primitive recursive well-order で、0 を最小元として持つものとする. S の元を $\alpha, \beta, \cdots$ と書く. また、$\alpha+1$, $\alpha-1$ をそれぞれ $\prec$ に関する $\underbrace{\text{successor, predecessor}}_{\text{primitive recursive な}}$ とする.

(3) $Seq : S \times \omega \longrightarrow S$ を primitive recursive function（に延ばせるもの）で次の (i) - (iii) を満たすとする.

(i) $\alpha = 0 \implies Seq(\alpha, x) = 0$, $x < \omega$,

(ii) α が successor $\implies Seq(\alpha, x) = \alpha - 1$, $x < \omega$,

(iii) α が limit $\implies \langle Seq(\alpha, x) \rangle_{x<\omega}$ は α に対する fundamental sequence. つまり,

$$\begin{cases} Seq(\alpha, x) \prec Seq(\alpha, x+1) \prec \alpha, & x \prec \omega \\ \lim\limits_{x<\omega} Seq(\alpha, x) = \alpha & \text{を満たす.} \end{cases}$$

Seq (α, x) のことを $\alpha[x]$ と書く.

Example　ε_0 に対する standard な fundamental sequence の system $\mathcal{S}$ は、S を ε_0 までの ordinal 全体と、また、$<$ を ordinal の不等号と同一視したとき、次の様に定義される.（Wainer [10] 参照）

limit $\alpha\ (<\varepsilon_0)$ に対して帰納的に $\alpha[x]$ を定義する.

α が $\omega^{\alpha_1}\cdot n_1+\cdots+\omega^{\alpha_k}\cdot n_k\quad(\alpha_1>\cdots>\alpha_k,\ 0<n_1,\cdots,n_k<\omega)$ と Cantor normal form で表わされているとき、

(i) α_k が $\beta+1$ の形のとき,

$$\alpha[x]=\omega^{\alpha_1}\cdot n_1+\cdots+\omega^{\alpha_k}\cdot(n_k-1)+\omega^{\beta}\cdot x,$$

(ii) α_k が limit のとき,

$$\alpha[x]=\omega^{\alpha_1}\cdot n_1+\cdots+\omega^{\alpha_k}\cdot(n_k-1)+\omega^{\alpha_k[x]}.$$

さて、$(\cdots(\alpha[x_1])[x_2])\cdots)[x_m]$ のことを $\alpha[x_1][x_2]\cdots[x_m]$ と書くことにしたとき、fundamental sequence の system の性質を記述するために重要な $\xrightarrow[n]{}$, $\overset{*}{\underset{n}{\Rightarrow}}$ を次のように定義する.

Def.　$n<\omega$, System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ とは、$\alpha>\beta$ で、かつ $0<k<\omega$ が存在して、

$$\underbrace{\alpha[n][n]\cdots[n]}_{k\text{個の}n}=\beta\quad のとき、$$

(2) $\alpha \underset{n}{\Rightarrow} \beta$ とは、$\alpha = \beta$ または $\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ のとき.

これらの記法を用いて、fundamental sequence の system の性質を記述しよう.

<u>Def.</u> $n < \omega$.

(1) System $\mathcal{S}$ が <u>(n)-built-up</u> とは、

$\alpha[x+1] \xrightarrow[n]{} \alpha[x]$, $x < \omega$, limit α のとき.

(2) System $\mathcal{S}$ が <u>(n)-diagonal-built-up</u> とは.

$\alpha[x+1] \xrightarrow[x+n]{} \alpha[x]$, $x < \omega$, limit α のとき.

(3) System $\mathcal{S}$ が <u>LW</u> とは.

$$\begin{cases} \alpha[1] \xrightarrow[1]{} \alpha[0] \\ \alpha[x+1] \xrightarrow[x]{} \alpha[x], \quad 0 < x < \omega, \quad \text{limit } \alpha \text{ のとき.} \end{cases}$$

(4) System $\mathcal{S}$ が <u>nice</u> であるとは.

$\alpha[x+1] \underset{x+1}{\Longrightarrow} \alpha[x]+1$, $x < \omega$, limit α のとき.

<u>Lemma 1.</u> System $\mathcal{S}$ に対して.

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up のとき、$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m, n \leqq s$ ならば.

$\alpha \xrightarrow[s]{} \beta$.

(2) $k = 0$ または 1 に対し、$\mathcal{S}$ が (k)-diagonal-built-up のとき.

$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m < s$ ならば、$\alpha \xrightarrow[s]{} \beta$.

(3) $\mathcal{S}$ がLWのとき、$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m < s$ ならば、$\alpha \xrightarrow[s]{} \beta$.

(4) $\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up のとき、$\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ ならば $\alpha \underset{n+1}{\Longrightarrow} \beta+1$

<u>Proof.</u> α に関する transf. ind. による.

(1) $\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m, n \leq s$ とする. このとき、$\alpha[m] \underset{m}{\Longrightarrow} \beta$.
今、$\mathcal{S}$ は (n)-built-up であるから、$\alpha[s] \underset{n}{\Longrightarrow} \alpha[m]$. ind. hyp. より. $\alpha[s] \underset{s}{\Longrightarrow} \alpha[m] \underset{s}{\Longrightarrow} \beta$. それゆえ、$\alpha \xrightarrow[s]{} \alpha[s] \underset{s}{\Longrightarrow} \beta$.

(2) $k = 0$ または 1. $\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m < s$ とする. このとき、$\alpha[m] \underset{m}{\Longrightarrow} \beta$.
$\mathcal{S}$ が (k)-diagonal-built-up であれば、

$$\alpha[s] \xrightarrow[s+k-1]{} \cdots \xrightarrow[m+k]{} \alpha[m].$$

このとき、ind. hyp. より. $\alpha[s] \xrightarrow[s]{} \alpha[m] \underset{s}{\Longrightarrow} \beta$.
それゆえ. $\alpha \xrightarrow[s]{} \alpha[s] \underset{s}{\Longrightarrow} \beta$.

(3) (2) と同様.

(4) $\alpha = 0$ のとき明らか. $\alpha = \gamma + 1$ のとき、$\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ とすると、$\gamma = \beta$ または $\gamma \xrightarrow[n]{} \beta$. $\gamma = \beta$ のとき、$\alpha = \beta + 1$. $\gamma \xrightarrow[n]{} \beta$ のとき、ind. hyp. より、$\gamma \underset{n+1}{\Longrightarrow} \beta + 1$. それゆえ $\alpha \underset{n+1}{\Longrightarrow} \beta + 1$.

α が limit の場合、$\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ とすると、$\alpha[n] = \beta$ または $\alpha[n] \xrightarrow[n]{} \beta$. $\alpha[n] = \beta$ のとき、$\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up ゆえ、$\alpha[n+1] \xrightarrow[n]{} \alpha[n] = \beta$. ind. hyp. より. $\alpha[n+1] \underset{n+1}{\Longrightarrow} \beta + 1$. それゆえ $\alpha \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n+1] \underset{n+1}{\Longrightarrow} \beta + 1$. $\therefore \alpha \xrightarrow[n+1]{} \beta + 1$.
$\alpha[n] \xrightarrow[n]{} \beta$ のとき、induction の仮定により、$\alpha[n] \underset{n+1}{\Longrightarrow} \beta + 1$.

$\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up だから、$\alpha[n+1] \xrightarrow[n]{} \alpha[n]$、(2) より、

$\alpha[n+1] \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n]$。それゆえ、$\alpha \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n+1] \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n] \xrightarrow[n+1]{} \beta+1$.

Lemma 1 から次のことが導かれる。

<u>Lemma 2.</u> System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up ならば、$\mathcal{S}$ は $(n+1)$-built-up.

(2) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up ならば、$\mathcal{S}$ は (n)-diagonal-built-up.

(3) $\mathcal{S}$ が (1)-diagonal-built-up ならば $\mathcal{S}$ は (n)-diagonal-built-up $(n>1)$

(4) $\mathcal{S}$ が (1)-built-up ならば $\mathcal{S}$ は LW.

(5) $\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up ならば、$\mathcal{S}$ は LW かつ nice.

(6) $\mathcal{S}$ が LW または nice ならば $\mathcal{S}$ は (1)-diagonal-built-up.

<u>Def.</u> System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\mathcal{S}$ が <u>normed</u> であるとは、次の (i)–(iii) を満たす、

norm $N : S \longrightarrow \omega$ が定義されているとき、

(i) $\alpha = 0$ のとき、$N(\alpha) = 0$

(ii) α が successor のとき、$N(\alpha - 1) < N(\alpha)$

(iii) α が limit のとき、$N(\alpha[x]) < N(\alpha[x+1])$, $x < \omega$.

(2) $\mathcal{S}$ が <u>regulated</u> であるとは、$\mathcal{S}$ が normed であって、その norm N が、次を満たすとき。

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta \leqq \alpha[N(\beta)] .$$

(3) $\mathcal{S}$ が <u>p.r.-regulated</u> であるとは、$\mathcal{S}$ が regulated であ，てその norm N が primitive recursive (に拡張されるもの) のときとする．

<u>Lemma 3.</u> System $\mathcal{S}$ に対し、以下の (1)～(3) の条件は同値．

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up

(2) $\mathcal{S}$ が Bachmann property $B[n]$ をもつ．

すなわち、$\alpha[x] < \beta \leqq \alpha[x+1] \Rightarrow \alpha[x] \leqq \beta[x]$

$x < \omega$, limit α を満たす．

(3) $\mathcal{S}$ が次の条件を満たす：

$$\alpha[x] < \beta \leqq \alpha[x+1] \Longrightarrow \beta \xrightarrow[n]{} \alpha[x] , \quad x<\omega, \ \alpha \text{ は limit.}$$

<u>Proof.</u> Schmidt [6] や 角田-青山 [3] の中にある．

<u>Lemma 4</u> System $\mathcal{S}$ が (n)-built-up とする．このとき．

$$N(\alpha) = |\{\beta \mid \alpha \xrightarrow[n]{} \beta\}|$$

と定義すると、N は norm であって、

$\beta < \alpha \Rightarrow \beta \leqq \alpha[N(\beta)]$ を満たす．

(すなわち、$\mathcal{S}$ は regulated である．)

<u>Proof</u>. まず、N が norm の条件 (i)−(iii) を満たすことは、$\mathcal{S}$ が (n)-built-up であることから出る. 次に $\alpha > \beta$ で、α は limit とする. このとき 2つの場合がある.

<u>Case 1</u>. $0 < p < \omega$ が存在して $\alpha[p] \geqq \beta > \alpha[p-1]$

<u>Case 2</u>. $\alpha[0] \geqq \beta$.

Case 1 のとき、Lemma 1 より

$$\alpha[p] \geqq \beta \xrightarrow[n]{} \beta[n] \overset{}{\underset{n}{\Longrightarrow}} \alpha[p-1] \xrightarrow[n]{} \cdots \xrightarrow[n]{} \alpha[0] \geqq 0 .$$

それゆえ、$p \leqq N(\beta)$. よって $\beta \leqq \alpha[p] \leqq \alpha[N(\beta)]$.

Case 2 では. $\beta \leqq \alpha[0] \leqq \alpha[N(\beta)]$.

<u>Lemma 5</u>. System $\mathcal{S}$ が regulated で、その norm を N とすると、$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \xrightarrow[N(\beta)]{} \beta$ である.

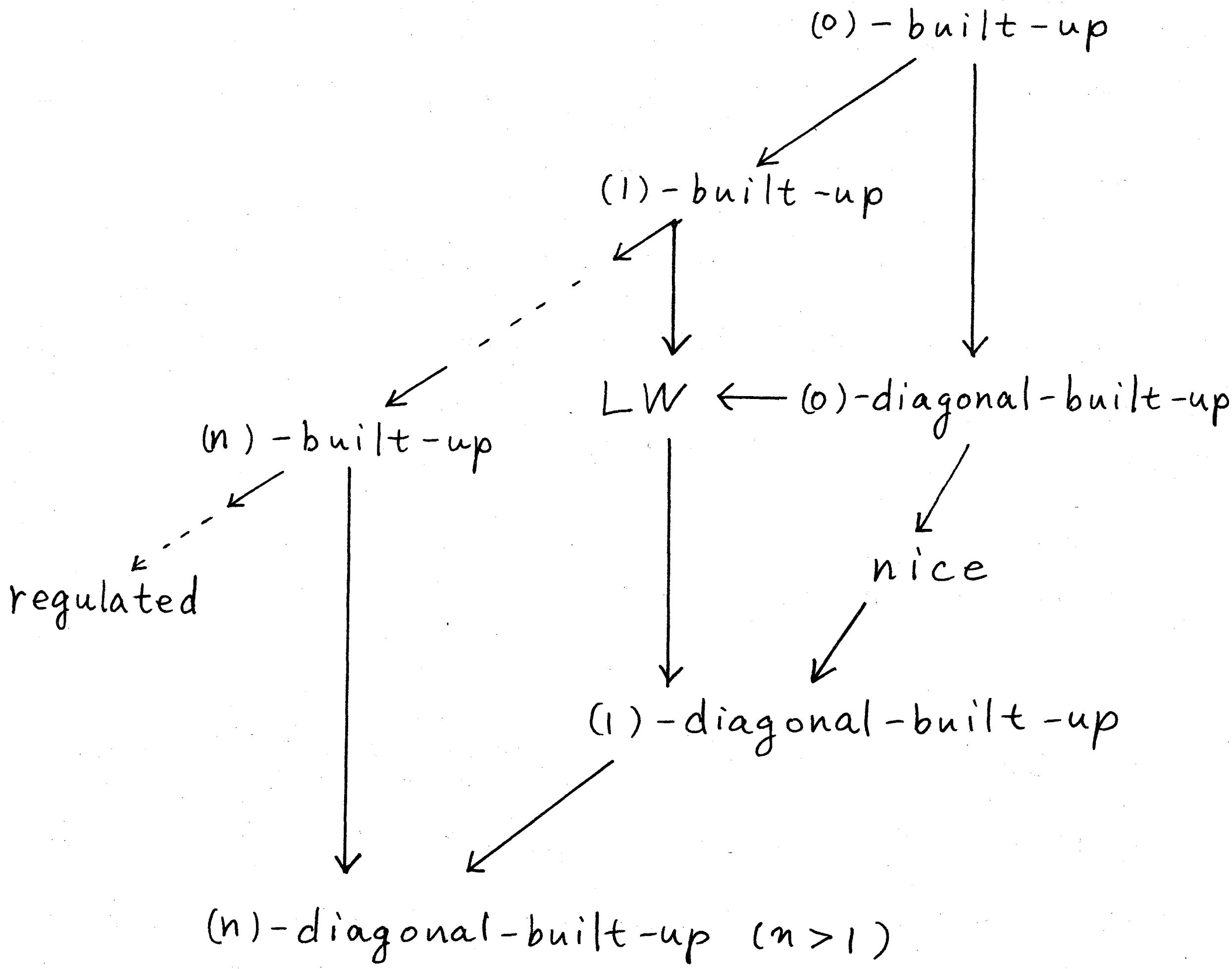
<u>Proof</u>. α に関する transf. ind. による.

<u>Lemma 6</u>. System $\mathcal{S}$ が regulated または、(1)-diagonal-built-up (ゆえに Lemma 2 から、LW または nice) であるとき、$\alpha > \beta$ ならば、ある $m < \omega$ が存在して、$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$ となる.

<u>Proof</u>. $\mathcal{S}$ が (1)-diagonal-built-up のときも、α に関する transf. ind. による.

下のような図式が書ける.

(但し、"$A \to B$" は "System $\mathcal{S}$ が A であれば、$\mathcal{S}$ は B である" ということを意味する.)



§ 2 Fast-growing, Hardy hierarchy と $<_\alpha$-recursive functions

この Section では、system $\mathcal{S}$ に対して、number-theoretic function の族 fast-growing hierarchy $\{F_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, Hardy hierarchy $\{H_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, 及び $<_\alpha$-recursive function の族 $\mathcal{C}(\alpha)$ の概念を導入し、system $\mathcal{S}$ に対するいくつかの条件の下で、それらの族の関係を考察する.

基本的な定義・概念は Rose [7] 等を参照されたい.

Def. (1) $f:\omega^k \longrightarrow \omega$ が $g:\omega \longrightarrow \omega$ により dominate されるとは、ある $c<\omega$ が存在して、

$$c \leqq max(x_1,\cdots,x_k) \Longrightarrow f(x_1,\cdots,x_k) \leqq g(max(x_1,\cdots,x_k))$$

のときとする.

(2) $f:\omega^k \longrightarrow \omega$ に対して、$f^m:\omega^k \longrightarrow \omega$ を次のように作る.

$$f^0(x_1,\cdots,x_k) = x_1$$

$$f^{m+1}(x_1,\cdots,x_k) = f(f^m(x_1,\cdots,x_k),x_2,\cdots,x_k)$$

Def. (fast-growing hierarchy $\{F_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, $\{\bar{F}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$).

$F_\alpha:\omega \longrightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} x+1 & ,\ \alpha = 0 \text{ のとき,} \\ F_{\alpha-1}^{x+1}(x) & ,\ \alpha \text{ は successor のとき,} \\ F_{\alpha[x]}(x) & ,\ \alpha \text{ は limit のとき.} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_\alpha$ を elementary recursive in F_α である関数全体,
$\overline{\mathcal{F}}_\alpha$ を elementary recursive in F_β $(\beta \leqq \alpha)$ である関数全体
とする.

<u>Def.</u> (Hardy hierarchy $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, $\{\overline{\mathcal{H}}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$).

$H_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} x & ,\ \alpha = 0 \text{ のとき.} \\ H_{\alpha-1}(x+1) & ,\ \alpha \text{ が successor のとき.} \\ H_{\alpha[x]}(x) & ,\ \alpha \text{ が limit のとき.} \end{cases}$$

$\mathcal{H}_\alpha$ をすべての elementary recursive functions と, H_α を含み, limited substitution と limited primitive recursion で閉じた最小の関数族とする.

$\overline{\mathcal{H}}_\alpha$ をすべての elementary recursive functions と, H_β $(\beta \leqq \alpha)$ を含み, limited substitution と limited primitive recursion で閉じた最小の関数族とする.

<u>Theorem 7</u> System $\mathcal{S}$ が LW または nice とする. このとき, $\{F_\alpha\}$, $(\{H_\alpha\})$ に対して, 次の (1) - (3) が成り立つ.

(1) 各 F_α は strictly increasing,

(2) $\alpha \xrightarrow[m]{} \beta \Rightarrow F_\beta(s) \leqq F_\alpha(s),\ F_\beta(x) < F_\alpha(x),\ x > s$

但し、$s = max(1, m)$.

(3) $\alpha > \beta \Rightarrow F_\beta$ は F_α によって dominate される.

(また、$\{H_\alpha\}$ に対しても (1)-(3) の F を H に置き換えて成り立つ.)

<u>Proof</u>、(1), (2) を同時に α に関する transf. ind. によって証明する. (Schmidt [8], 青山-角田 [1], 角田-青山 [4]).

(3) は Lemma 6 により、$\alpha > \beta$ ならば、ある $m < \omega$ に対して $\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$ となるので、(2) から、F_β は F_α によって dominate されることが解かる.

<u>Def.</u> ($<_\alpha$-recursive function $\mathcal{U}(\alpha)$)

$\mathcal{U}(\alpha)$ をすべての primitive recursive function を含み、substitution と次の <u>(unnested) α-recursion</u> について閉じた最小の関数族とする.

$$f(0, u) = g_0(u)$$

$$f(x, u) = g_1(x, u, f(p(x, u), u)) \quad , x > 0$$

$$\text{但し、}\begin{cases} p(x, u) < x & , 0 < x < \alpha \text{ のとき.} \\ p(x, u) = 0 & , \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

$\mathcal{U}(\alpha)$ に属する関数は $<_\alpha$-recursive であると言われる.

<u>Lemma 8</u>　$\omega \leq \alpha$ とする．$U(\alpha)$ はすべての primitive recursive function を含み、substitution と primitive recursion と、以下の <u>α-annihilation</u> で閉じた最小の関数族である

$$f(0, u) = 0$$

$$f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u), \quad x > 0.$$

但し、$\begin{cases} p(x, u) < x & , 0 < x < \alpha \text{ のとき、} \\ p(x, u) = 0 & \text{その他のとき、} \end{cases}$

<u>Proof.</u> primitive recursion と、α-annihilation が次の α-recursion : $\begin{cases} f(0, u) = g_0(u) \\ f(x, u) = g_1(x, u, f(p(x, u), u)), \quad x > 0 \end{cases}$

を生成することを示す．

g を　$g(0, u) = 0$

$$g(x, u) = 1 + g(p(x, u), u), \quad x > 0$$

と置く．この意味は、

$$g(x, u) = \mu n \ (p^n(x, u) = 0).$$

h を、$h(x, 0, u) = g_0(u)$,

$$h(x, y, u) = g_1(p^{g(x,u)-y}(x, u), u, h(x, y-1, u)), \quad y > 0$$

と定義すると、

$$f(p^{g(x,u)-n}(x,u),u) = h(x,n,u), \quad 0 \leqq n \leqq g(x,u)$$

$(\because)$ $n=0 \Rightarrow p^{g(x,u)}(x,u)=0$ より.

$$\begin{aligned} n>1 \Rightarrow f(p^{g(x,u)-n}&(x,u),u) \\ &= g_1(p^{g(x,u)-n}(x,u),u,f(p^{g(x,u)-(n-1)}(x,u),u)) \\ &= g_1(p^{g(x,u)-n}(x,u),u,h(x,n-1,u)) \\ &= h(x,n,u) \end{aligned}$$

だから. $f(x,u) = h(x,g(x,u),u)$ である.

<u>Def.</u> $\alpha \succ \beta$ のとき, $N: S^2 \longrightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$N(\alpha,\beta) = \mu n(\alpha \xrightarrow[n]{} \beta).$$

<u>注意</u>: Lemma 6 により, system $\mathcal{S}$ が regulated や, (1)-diagonal-built-up (ゆえに LW または nice) のとき, $\alpha \succ \beta$ に対し, $\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ となる n は存在する.

ここで我々は、仮定として、以下のものを採用する.

(i) System $\mathcal{S}$ は <u>LW または nice</u> とする.

(ii) $\mathcal{S}$ に対して、ordinal としての演算 (加法 $\alpha+\beta$, 乗法 $\alpha\cdot\beta$, べき法 α^β) を考えるが、それらは <u>primitive recursive function</u> (に拡張出来るもの) とする.

(iii) 関数 $N(\alpha, \beta)$ は primitive recursive function（に拡張出来るもの）とする.

Lemma 9 (1) $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{F}_n$ はすべての primitive recursive functions を含む.

(2) $\alpha \geqq 3$, F_α は $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ 内にある関数を dominate する.

(3) $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{F}_{\alpha+n}$ は substitution, primitive recursion で閉じている.

Theorem 10. 上のような条件(i)〜(iii)の下での system $\mathcal{S} = (S, \prec)$ に対して、$\prec$ の order type Δ を ε-number とし、ある $\beta < \alpha^\omega$ $(\alpha \geqq \omega)$ に対して、$p \in \mathcal{F}_\beta$ とする.

但し、
$$\begin{cases} p(x, u) \prec x & , 0 \prec x \prec \alpha \text{ のとき}, \\ p(x, u) = 0 & , \text{その他のとき}. \end{cases}$$

このとき、f が α-annihilation:

$$\begin{cases} f(0, u) = 0 \\ f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u) & , x > 0 \end{cases}$$

によって定義されているならば、ある $k < \omega$, $r \in \mathcal{F}_{\alpha^k}$ が存在して、

$$f(x, u) < F_{\alpha^k}(r(x, u))$$

となる.

<u>Proof.</u> $p \in \mathcal{F}_\beta$ ($\beta \leqq \alpha^\omega$) とする. α の Cantor normal form: $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\ell} \cdot m_\ell$, $\alpha_1 > \cdots > \alpha_\ell$, $0 < m_1, \cdots, m_\ell < \omega$ とする.

$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1$ とする. このとき, ある $1 < m < \omega$ が存在して, $p \in \mathcal{F}_{\gamma m}$.

$\delta = \gamma^{(m+1)}$ と置く. このとき, Lemma 9 より, F_δ は primitive recursive in p である関数を dominate する.

関数 $s(x, u, y) =$

$$\max[N(\delta \cdot p(p(x,u),u), \delta), N(\delta \cdot p(x,u), \delta \cdot p(p(x,u),u)+1),$$
$$N(\delta \cdot \alpha, \delta \cdot p(x,u)), N(\alpha^{m+2}, \delta \cdot \alpha), p(x,u), u, y]$$
$$+ y + 1$$

は primitive recursive in p であるので, ある $0 < b < \omega$ が存在して, $s(x, u, y) \leqq F_\delta(\max(x, u, y)) + b$.

$r(x, u) = \max[N(\delta \cdot p(x,u), \delta), N(\delta \cdot x, \delta \cdot p(x,u)+1),$
$N(\delta \cdot \alpha, \delta \cdot x), N(\alpha^{(m+2)}, \delta \cdot \alpha), x, u, b] + b$ と置くと, $r \in \mathcal{F}_\delta$ であって,

$$\begin{aligned} r(p(x,u), u) + 1 &= s(x, u, b) \\ &\leqq F_\delta(\max(x, u, b)) + b \\ &\leqq F_\delta(\max(x, u, b) + b) \\ &\leqq F_\delta(r(x, u)). \end{aligned}$$

今, $f(x, u) \leqq F_{\delta \cdot x}(r(x, u))$ である.

(∵) x の transf. ind. による.

◎ $f(0, u) = 0 \leqq F_{\delta\cdot 0}(r(x, u))$.

◎ $x > 0$, $f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u)$

$$\leqq 1 + F_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x,u), u))$$

$$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x,u), u) + 1)$$

$$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)}(F_{\delta}(r(x, u)))$$

($N(\delta\cdot p(x,u), \delta) \leqq r(x, u)$ より. Th. 7 を用いて.)

$$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)}(F_{\delta\cdot p(x,u)}(r(x, u)))$$

$$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)+1}(r(x, u))$$

($N(\delta\cdot x, \delta\cdot p(x,u)+1) \leqq r(x, u)$ より Th. 7 を用いて)

$$\leqq F_{\delta\cdot x}(r(x, u)).$$

さらに. $N(\delta\cdot\alpha, \delta\cdot x) \leqq r(x, u)$ より.

$$F_{\delta\cdot x}(r(x, u)) \leqq F_{\delta\cdot\alpha}(r(x, u))$$

また. $N(\alpha^{m+2}, \delta\cdot\alpha) < r(x, u)$ より.

$$F_{\delta\cdot\alpha}(r(x, u)) < F_{\alpha^{m+2}}(r(x, u))$$

結局. $f(x, u) < F_{\alpha^k}(r(x, u))$, $k < \omega$.

<u>Corollary 11.</u> System $\mathcal{S}$ を Th. 10 の条件の下にあるものとする. このとき. $\alpha \geqq \omega$ とすると.

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha^{\omega}} \mathcal{F}_{\beta}$$

である.

したがって、$\mathcal{S}$ の order-type を Δ, $\Delta > \Delta'$ を ε-number とすると、

$$\bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{F}_\alpha \text{ である.}$$

Proof. Lemma 9 と Theorem 10 より, $\bigcup_{\beta<\alpha\omega} \mathcal{F}_\beta$ はすべての primitive recursive function を含み, primitive recursion と α-annihilation に関して閉じている. だから Lemma 8 より結論を得る.

次に, System $\mathcal{S}$ が満たしている条件を更に強めて, (i)-(iii) に加えて, 以下の (※) を採用して, $\mathcal{S}$ が (i)(ii)(iii)(※) を満たしているものとする.

$$(※) \begin{cases} \alpha \leqq \delta \text{ に対して,} \\ (\delta\cdot\beta+\alpha)[x] = \delta\cdot\beta+\alpha[x], \\ \omega^{\alpha+1}[x] = \omega^{\alpha}\cdot x \quad , \quad x<\omega . \end{cases}$$

Lemma 12. System $\mathcal{S}$ が上記の条件を満たしているとする. このとき, $H_{\delta\cdot\beta+\alpha}(x) = H_{\delta\cdot\beta}(H_\alpha(x))$ である.

Proof. α に関する transf. ind. による.

<u>**Lemma 13**</u> System $\mathcal{S}$ が上記の仮定を満たすとき、次が成り立つ.

(1) $H_{\omega^m}(x+1) \geqq F_m(x)+1$, $x \geqq 1$, $m<\omega$.

(2) $F_m(x+1) \geqq H_{\omega^m}(x)+1$, $x \geqq 1$, $m<\omega$.

(3) 関数 H_{ω^ω} はすべての primitive recursive function を dominate する.

(4) $\omega \leqq \alpha$ とするとき、$\bigcup_{\beta<\omega^{\alpha+1}} \mathcal{H}_\beta$ は substitution で閉じている.

(5) $\omega \leqq \alpha$ とするとき、$\bigcup_{\beta<\omega^{\alpha+\omega}} \mathcal{H}_\beta$ は primitive recursion で閉じている.

<u>Proof.</u> (1), (2) : Ketonen - Solovay [5] p. 298 参照.

(3) は (1) より出る. (4) Wainer [10] p. 286 参照.

(5) f が $g_0, g_1 \in \bigcup_{\beta<\omega^{\alpha+\omega}} \mathcal{H}_\beta$ から primitive recursion

$$\begin{cases} f(0, u) = g_0(u) \\ f(x+1, u) = g_1(x+1, b, u) \end{cases}$$

で定義されているとする. だから、ある $c, n<\omega$ に対して、

$$g_0(u) \leqq H_{\omega^{\alpha+n}}(\max(x, u, y)+c)$$

$$g_1(x, u, y) \leqq H_{\omega^{\alpha+n}}(\max(x, u, y)+c).$$

このとき、x の induction により、

$$f(x, u) \leqq H_{\omega^{\alpha+n}}^{x+1}(\max(x, u)+c(x+1))$$ を示す.

$$\begin{cases} (\because) \circ\ f(0, u) = g_0(u) \leqq H_{\omega^\alpha+n}(\max(u) + c) \\ \circ\ f(x+1, u) = g_1(x+1, u, f(x, u)) \\ \quad \leqq H_{\omega^\alpha+n}(\max(x+1, u, f(x, u)) + c) \\ \quad \leqq H_{\omega^\alpha+n}(H^{x+1}_{\omega^\alpha+n}(\max(x+1, u) + c(a+1)) + c) \\ \quad \leqq H^{x+2}_{\omega^\alpha+n}(\max(x+1, u) + c(a+2)) \end{cases}$$

次に $e = \max(x \quad , u) + c(x+1)$ と置くと、

$$H^{x+1}_{\omega^\alpha+n}(e) \leqq H^{e}_{\omega^\alpha+n}(e) = H_{\omega^\alpha+n+1}(e)$$

(4)より、関数 $H_{\omega^\alpha+n+1}(e)$ は $H_{\omega^\alpha+(n+2)}$ によって dominate される. 結局、$\bigcup_{\beta<\omega^\alpha+\omega} \mathcal{H}_\beta$ は primitive recursion によって閉じている.

<u>Theorem 14</u> 上のような条件(i)(ii)(iii)(※)の下での System $\mathcal{S} = (S, \prec)$ に対して、$\prec$ の order type Δ を ε-number とし、ある $\beta < (\omega^\alpha)^\omega$ $(\alpha \geqq \omega)$ に対して、$p \in \mathcal{H}_\beta$ とする.

但し、$\begin{cases} p(x, u) < x & , 0 < x < \omega^\alpha \\ p(x, u) = 0 & \text{その他のとき.} \end{cases}$

このとき、f が ω^α-annihilation :

$$\begin{cases} f(0, u) = 0 \\ f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u) \quad , x > 0 \end{cases}$$

によって定義されているならば、ある $k < \omega$, $r \in \mathcal{H}_{\omega^{\alpha\cdot k}}$

が存在して、 $f(x,u) < H_{(\omega^\alpha)k}(r(x,u))$ となる.

<u>Proof.</u> $p \in \mathcal{H}_\beta$, $\beta < (\omega^\alpha)^\omega$, $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\ell} \cdot m_\ell$

$\alpha_1 > \cdots > \alpha_\ell$, $0 < m_1, \cdots, m_\ell < \omega$ とする.

$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1$ と定義すると、ある $1 < m < \omega$ に対し、$p \in \mathcal{H}_{\omega^{\gamma} \cdot m}$

$\delta = (\omega^\gamma)^{(m+1)}$ とすると、Lemma 13 より、H_δ は primitive recursive in p である関数を dominate するので、関数

$s(x,u,y) = \max\{N(\delta \cdot p(x,u), \delta \cdot (p(p(x,u),u)+1)),$
$N(\delta \cdot \omega^\alpha, \delta \cdot p(x,u)), p(x,u), u, y\} + y + 1$ は

primitive recursive in p であるから、$0 < b < \omega$ が存在して、 $s(x,u,y) \leqq H_\delta(\max(x,u,y)) + b$.

$r(x,u) = \max\{N(\delta \cdot x, \delta \cdot (p(x,u)+1)), N(\delta \cdot \omega^\alpha, \delta \cdot x),$
$x, u, b\} + b$ と定義すると、

$r \in \mathcal{H}_\delta$ であって、さらに、

$$
\begin{aligned}
r(p(x,u),u)+1 &= s(x,u,b) \\
&\leqq H_\delta(\max(x,u,b)) + b \\
&\leqq H_\delta(\max(x,u,b)+b) \\
&\leqq H_\delta(r(x,u)).
\end{aligned}
$$

このとき、 $f(x,u) \leqq H_{\delta \cdot x}(r(x,u))$ を x についての $<$ に関する transfinite induction で示す.

$\Gamma(\text{i})$. $f(0,u) \leqq H_{\delta \cdot 0}(r(x,u))$.

$$
\begin{aligned}
\circ\ f(x,u) &= 1 + f(p(x,u),u) \\
&\leqq 1 + H_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x,u),u)) \\
&\leqq H_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x,u),u)+1) \\
&\leqq H_{\delta\cdot p(x,u)}(H_\delta(r(x,u))) \\
&= H_{\delta\cdot(p(x,u)+1)}(r(x,u)) \\
&\leqq H_{\delta\cdot x}(r(x,u))
\end{aligned}
$$

さらに、$H_{\delta\cdot x}(r(x,u)) \leqq H_{\delta\cdot\omega^\alpha}(r(x,u))$

$$(\because\ N(\delta\cdot\omega^\alpha, \delta\cdot|x|) \leqq r(x,u))$$

結局，$\delta\cdot\omega^\alpha = \omega^{\gamma\cdot(m+1)+\alpha} = \omega^{\alpha(m+2)}$ より、

$$f(x,u) < H_{\omega^{\alpha\cdot k}}(r(x,u)), \quad k<\omega.$$

<u>Corollary 15</u>　System $\mathcal{S}$ を Th. 14 の条件の下にあるものとする。このとき、$\alpha \geqq \omega$ として、

$$\mho(\omega^\alpha) \subseteqq \bigcup_{\beta<(\omega^\alpha)^\omega} \mathcal{H}_\beta$$

となる。したがって、$\mathcal{S}$ の order-type を Δ，$\Delta > \Delta'$ を ε-number とすると、$\bigcup_{\alpha<\Delta'} \mho(\alpha) \subseteqq \bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{H}_\alpha$ である。

<u>Proof.</u>　Lemma 13 と Theorem 14 より、$\bigcup_{\beta<(\omega^\alpha)^\omega} \mathcal{H}_\beta$ はすべての primitive recursive functions を含み、primitive recursion と、ω^α-annihilation に関して閉じている。だから、Lemma 8 により、結論を得る。

§3 Enumeration hierarchy

Kleene による enumeration hierarchy $\{K_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, $\{\bar{K}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$ は次のように定義される．(Schwichtenberg [9], Rose [7] 参照)

$\Sigma = \{1, 2\}$ とする．sequence $z_m, \cdots, z_0$ が，x の modified binary representation とは．

$z_i \in \Sigma$,

$x = 2^m \cdot z_m + 2^{m-1} \cdot z_{m-1} + \cdots + 2z_1 + z_0$.

0 の modified binary representation は empty sequence.

$b(x) = z_m z_{m-1} \cdots z_0 \in \Sigma^*$. とする．

Example　$b(3) = 11$, $b(5) = 21$, $b(0) =$ empty string.

$z_m z_{m-1} \cdots z_0 \in \Sigma^*$ の ternary value は次で定義される：

$$t(z_m z_{m-1} \cdots z_0) = 3^m \cdot z_m + 3^{m-1} \cdot z_{m-1} + \cdots + 3z_1 + z_0$$

empty string の ternary value は 0.

$$\langle x_0, x_1, \cdots, x_n \rangle = t(b(x_n)\,0\,b(x_{n-1})\,0 \cdots 0\,b(x_0))$$

Example　$\langle 3, 0, 5 \rangle = t(b(5)\,0\,b(0)\,0\,b(3)) = t(210011)$
$= 571$.

$(x)_i = x_i$ とする．但し，$x = \langle x_0, x_1, \cdots, x_n \rangle$．

与えられた関数 h と，elementary recursive in h である関数 f に対して，index $\#_h(f)$ を f の生成に従って定義する．

(i) $f(x_1, \cdots, x_p) = h(x_1, \cdots, x_p)$ ならば $\#_h(f) = \langle 0, p \rangle$．

(ii) $f(x_1, \cdots, x_n) = C_n^c(x_1, \cdots, x_n) = c$ ならば $\#_h(f) = \langle 1, n, c \rangle$．

(iii) $f(x_1, \cdots, x_n) = U_n^i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ ならば $\#_h(f) = \langle 2, n, i \rangle$

(iv) $f(x, y) = x + y$ ならば $\#_h(f) = \langle 3, 2 \rangle$

(v) $f(x, y) = x \dot{-} y$ ならば $\#_h(f) = \langle 4, 2 \rangle$

(vi) $f(x_1, \cdots, x_n) = g(k_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, k_m(x_1, \cdots, x_n))$

ならば，$\#_h(f) = \langle 5, n, \#_h(g), \#_h(k_1), \cdots, \#_h(k_m) \rangle$．

(vii) $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i<x_1} g(i, x_2, \cdots, x_n)$ ならば．$\#_h(f) = \langle 6, n, \#_h(g) \rangle$

(viii) $f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i<x_1} g(i, x_2, \cdots, x_n)$ ならば．$\#_h(f) = \langle 7, n, \#_h(g) \rangle$

そして次の関数 el^h を定義する．

$$el^h(x, y) = \begin{cases} f((y)_0, (y)_1, \cdots, (y)_{n-1}), & x \text{ が elementary recursive in } h \text{ である } f \text{ の index すなわち、} x = \#_h(f) \text{ のとき.} \\ 0 & \text{, その他のとき.} \end{cases}$$

注意： $el^{h}(x,y)$ は primitive recursive in h であるが、elementary recursive in h ではない。

$$E_\alpha(x,y)=\begin{cases}0, & \alpha=0 \text{ のとき,}\\ el^{H}(x,y), & \alpha \text{ は succ. 但し, } H=E_{\alpha-1}\\ el^{H}((x)_1,y), & \alpha \text{ は limit 但し } H=E_{\alpha[(x)_0]}.\end{cases}$$

と定義して、

$\mathcal{K}_\alpha$ を elementary recursive in E_α である関数全体、

$\overline{\mathcal{K}}_\alpha$ を elementary recursive in E_β $(\beta\leqq\alpha)$ である関数全体と定義する。

このとき、Zemke [11] により、次のことが解かる。

Theorem 16 (Zemke) System $\mathcal{S}=(S,\prec)$ が、p.r.-regulated であれば、

$$\overline{\mathcal{F}}_{2+\alpha}=\mathcal{F}_{2+\alpha}=\overline{\mathcal{K}}_\alpha=\mathcal{K}_\alpha \quad (\alpha\in S)$$

が成り立つ。

最後に次の2つの考察を行なおう。

考察1. 我々の Section 2 での Th. 10, Th. 14 では、fundamental sequence の system $\mathcal{S}$ の条件として、

$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{S}\text{ は LW または nice であって、関数}\\ \quad N(\alpha,\beta)=\mu n(\alpha \xrightarrow[n]{} \beta)\\ \text{が primitive recursive である}\end{array}\right.$

ことが必要であった。また、Th. 16 では、p.r.-regulated という条件から、norm $N(\alpha)$ が primitive recursive であることが必要であった。

今、Section II の Lemmata 2, 4 より、(1)-built-up であって、そこから誘導される norm $N(\alpha)=|\{\beta \mid \alpha \xrightarrow[1]{} \beta\}|$ が primitive recursive であれば、Th. 10 と Th 16 の要請を同時に満たすことが出来るが、そのことは、単なる十分条件にすぎないので、Th. 10 と Th. 16 を同時に成り立たせるようなより良い条件をもとめることは今後の課題であろう。

考察2. Ketonen - Solovay [5] は Paris-Harrington Principle から定義される関数族と ε_0 までの fast-growing hierarchy $\{F_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ との関係を示して、Paris-Harrington Principle の PA (first order Peano arithmetic) での証明不可能性を示した。この関係を一般化する際、より一般の fundamental sequence の system に対する性質を調べる必要がある。

下田 [14] は Γ_0 までの fundamental sequence の system

を詳しく調べて、そのsystemが(1)-built-upであること、さらに、 $N(\alpha,\beta)=\mu n(\alpha \xrightarrow[n]{} \beta)$ がprimitive recursiveであることを示している。

この結果によって我々の定理が、具体的なΓ_0までのfundamental sequenceのsystemに対して適用されることが保証される。

B I B L I O G R A P H Y

[1] Aoyama K., Kadota N., A note on built-upness, manuscript.

[2] Dennis-Jones, E.C., Wainer, S.S., Subrecusive hierarchies via direct limits, Lecture Notes in Math. 1104(1984), 117-128.

[3] Kadota N., Aoyama K., A note on Schmidt's built-up systems of fundamental sequences, RIMS Kokyuroku, 644(1988), 30-43.

[4] Kadota N., Aoyama K., Some extensions of built-upness on systems of fundamental sequences, manuscript.

[5] Ketonen, J., Solovay, R., Rapidly growing Ramsey functions, Annals of Mathematics, 113(1981), 267-314.

[6] Löb, M.H., Wainer, S.S., Hierarchy of number theoretic functions I, II, Arch. math. Logik, 13(1970), 39-51, 97-113.

[7] Rose, H.E., Subrecursion : functions and hierarchies, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[8] Schmidt, D., Built-up systems of fundamental sequences and hierarchies of number theoretic functions, Arch. math. Logik 18(1976), 47-53. Postscript 18(1977), 145-146.

[9] Schwichtenberg, H., Eine Klassifikation der ε_0-recursiven Funktionen, Zeitschr. f. math. Logik, 17(1971), 61-74.

[10] Wainer, S.S., Ordinal recursion and refinement of the extended Grzegorczyk hierarchy, JSL 37(1972), 281-292.

[11] Zemke, F., P.r.-regulated systems of notation and the subrecursive hierarchy equivalence property, Trans. of AMS, 234(1977), 89-118.

----- provably recursive function に関するもの ⇓ -----

[12] Kino A., On provably recursive functions and ordinal recursive functions, J. Math. Soc. Japan, 29(1968), 456-476.

[13] Takeuti G., Proof theory, 2nd ed. North-Holland, 1987.

----- fundamental sequences の system に関するもの 以 -----

[14] Shimoda M., Elementary properties of a system of fundamental sequences for Γ_0, manuscript.

[15] Takeuti G., Yasugi M., Fundamental sequences of ordinal diagrams, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 25(1976), 1-80.